

Analityczne podejście do kwestii poszerzania międzytorza na łukach tras kolejowych

Władysław KOC¹

Streszczenie

W artykule podjęto kwestię konstruowania układu geometrycznego, dwutorowej linii kolejowej położonej w łuku, z wykorzystaniem zasad analitycznej metody projektowania. Umożliwiło to, podobnie jak w innych zastosowaniach tej metody, uzyskać pełnię spojrzenia na rozpatrywany problem oraz określić sposób wyznaczania kluczowych parametrów. Przedstawiono analityczną metodę wyznaczenia osi międzytorza oraz osi toru zewnętrznego i toru wewnętrznego, prowadzącą do uzyskania wymaganej wartości poszerzenia międzytorza. Poszerzenie jest uzyskiwane przez zróżnicowanie długości krzywych przejściowych w torze zewnętrznym i w torze wewnętrznym. Dysponując współrzędnymi osi torów w lokalnym układzie współrzędnych, można je łatwo przenieść do układu współrzędnych płaskich prostokątnych PL-2000, stanowiącego element państwowego systemu odniesień przestrzennych. Kontynuację prowadzonej analizy stanowiło zagadnienie kilometracji (pikietażu) osi międzytorza i torów szlakowych. Na koniec wykazano praktyczną przydatność proponowanej metody oraz jej wysoką precyzję, rozpatrując szeroki zakres promieni łuków kołowych.

Słowa kluczowe: tor kolejowy, poszerzenie międzytorza, wyznaczenie osi torów w łuku, kilometracja linii kolejowej

1. Wstęp

Jeden z elementów projektowania układów geometrycznych toru kolejowego, czego dotyczą m.in. prace [1–6], stanowi zwiększanie rozstawu torów, powszechnie określane mianem poszerzania międzytorza. Operacja ta jest wykonywana zarówno na odcinkach prostych, jak również na odcinkach położonych w łuku. Na odcinkach prostych polega ona najczęściej na poprzecznym odsunięciu jednego z torów w celu uzyskania wolnej przestrzeni, np. na zlokalizowanie peronu przystankowego. W Polsce odbywa się to zgodnie z zasadami ustalonymi w latach 70. XX wieku przez H. Bałucha [7, 8]. Zasady te wciąż zachowują aktualność, stanowiąc również przedmiot zajęć dydaktycznych, jak też prowadzonych analiz naukowych (można tutaj wymienić pracę [9] z 2015 roku). Tymczasem w Europie, w 2010 roku pojawiły się również inne propozycje rozwiązania omawianego problemu [10].

Należy jednak zauważyć, że problem poszerzania międzytorza na odcinkach prostych wykazuje analogię do przypadku łączenia ze sobą torów równoległych za pomocą dwóch rozjazdów; odbywa się to na długości torów zwrotnych, przyjmujących kształt

łuków odwrotnych. Ponieważ w typowym ukształtowaniu geometrycznym toru zwrotnego w rozjeździe kolejowym, stosowanym od zarania kolejnictwa, stosuje się pojedynczy łuk kołowy (bez krzywych przejściowych), pomiędzy końcami rozjazdów stosowanych w połączeniu torów musi występować jeszcze wstawka prosta. Jednak w ostatnim okresie, dążąc do wyłagodzenia wykresu krzywizny, wprowadza się tzw. „odcinki klotoidy” po obu stronach łuku kołowego, na których krzywizna zmienia się w sposób liniowy, często jednak nie osiągając w punktach skrajnych wartości zerowych [9, 11–14]. W takim przypadku wstawka prosta staje się niepotrzebna, a rzędna końcowa pierwszego rozjazdu jest równa połowie wymaganego rozstawu torów. Identyfikacyjny drugi rozjazd jest wstawiany w torze równoległym, natomiast końce obydwu rozjazdów są ze sobą połączone. Jeszcze korzystniejsze rozwiązanie oznaczała propozycja zastosowania, w torze zwrotnym rozjazdu, odcinków o nieliniowej krzywiznie [15]. Znalazło to swój wyraz w przedstawionym nowym rozwiązaniu odnoszącym się do poszerzenia międzytorza [16].

Do kwestii poszerzania międzytorza na liniach dwutorowych położonych w łuku kołowym należy się odnieść w zupełnie inny sposób. Obok właściwego

¹ Prof. dr hab. inż.; Politechnika Gdańska, Katedra Transportu Szynowego i Mostów; e-mail: kocwl@pg.edu.pl.

kształtowania obu osi torów, prowadzącego do uzyskania wymaganej wartości poszerzenia, istotną rolę odgrywa również problem określania kilometrażu. Kilometraż powinien być ustalany dla osi międzytorza, co na odcinkach prostych obejmuje również obydwie tory szlakowe, jednak na łukach kołowych powoduje powstanie rozbieżności zarówno dla toru zewnętrznego (który jest dłuższy od osi międzytorza), jak i toru wewnętrznego (który ma mniejszą długość). W Standardach Technicznych [17] ten problem nie jest szczególnie eksponowany, lecz następuje koncentracja uwagi na zagadnieniu kilometracji osi pojedynczego toru do celów projektowych.

Przepisy [17] zawierają ogólne stwierdzenie, że kilometrację osi toru należy wyznaczać niezależnie dla każdego z torów linii kolejowej. Pikietaż projektowy² może być zakładany lokalnie przy projektowaniu układów geometrycznych torów i nie jest on tożsamy z kilometracją eksploatacyjną linii kolejowej ustalaną na etapie porealizacyjnym.

2. Określanie wartości poszerzenia międzytorza

W odniesieniu do kwestii poszerzenia międzytorza, Standardy [17] stanowią, że jeżeli nie występują ograniczenia terenowe lub infrastrukturalne, układy torowe (osie torów lub połączeń torów) należy projektować jako równoległe (na odcinkach prostych) lub współśrodkowe (na odcinkach położonych w łukach poziomych). Zmianę rozstawu osi torów szlakowych lub głównych zasadniczych (o znacznej wartości) należy wykonywać według zasad określonych w pracy [8]. Niezależnie od tego, rozstaw osi torów musi spełniać wymagania w zakresie skrajni budowl i ustalone według przepisów odrębnych.

Zgodnie z Warunkami Technicznymi [18], w ramach utrzymania na sieci PKP Polskie Linie Kolejowe S.A., należy zachować skrajnię budowl i ujednoliconą typu GPL-1 (gdy pozwala na to zastanie usytuowanie budowl i, a parametry eksploatacyjne linii lub odcinka nie stanowią inaczej). Utrzymanie tej skrajni zapewnia zachowanie normatywnych skrajni krajowych. Skrajnię tę należy oceniać odrębnie dla części do wysokości 1170 mm i dla części usytuowanej wyżej.

Przy skrajni budowl i ujednoliconej GPL-1 jest wymagane zachowanie dodatkowej wolnej przestrzeni określonej w Karcie Typu Skrajni Budowl i [19]. Każda karta zawiera obrys nominalnej skrajni

zabudowy oraz granicznej skrajni zabudowy w formie poglądowej, tabelę współrzędnych punktów znajdujących się na tychże obrysach oraz zestawienie wzorów uwzględniających wpływ krzywizn poziomych (Δb_s). Wszystkie obrysy skrajni powinny podlegać przechyłaniu w przypadku występowania przechyłki projektowej toru, przy czym wpływ przechyłki (Δb_D) wyznacza składowa pozioma przemieszczenia rozpatrywanego punktu obrysu skrajni z uwagi na przechyłkę.

Zasady dotyczące obrysów skrajni odnoszą się bezpośrednio również do rozstawu torów. W międzytorzu niezabudowanym, rozstaw torów należy odnosić do dwukrotnej szerokości połowy obrysów wskazanych w Kartach Typów Skrajni Budowl i. W tym przypadku nie stosuje się wymagań dotyczących wolnej przestrzeni przy skrajni budowl i ujednoliconej.

Przepisy [18] zawierają również – jako fakultatywny (a więc możliwy do dalszego stosowania) Załącznik III: Skrajnia budowl i na odcinkach toru na prostej i w łuku (według zasad obowiązujących przed wprowadzeniem modułu A2). Zamieszczono tam wzory na wartości zwiększenia nominalnych poziomych wymiarów skrajni na łuku:

- w części wewnętrznej łuku:

$$\Delta b_w = \Delta b_R + \Delta b_h, \quad (1)$$

- w części zewnętrznej łuku:

$$\Delta b_z = \Delta b_R, \quad (2)$$

gdzie:

Δb_R – poszerzenie wywołane ustawianiem się pojazdu wzdłuż cięciwy,

Δb_h – poszerzenie wywołane przechyłaniem się pudła pojazdu torowego.

Wartości poszerzenia poziomych wymiarów skrajni Δb_R zależą od promienia łuku kołowego. Zawiera je stosowna tablica, z której wynika, że dla $R > 500$ m są one stosunkowo nieduże i wynoszą kilkadziesiąt milimetrów. Zmiany skrajni wywołane poprzecznym pochyleniem pudła pojazdu na torze z przechyłką, uwzględnia się jako poszerzenie wymiarów poziomych skrajni jedynie od strony wewnętrznej łuku. Przy określonej przechyłce h , charakterystyczne punkty skrajni na wysokości H_i nad główką szyny wewnętrznej ulegają przemieszczeniu do wewnątrz łuku o wartość:

² Pikietaż projektowy (lokalny) – określenie konkretnego miejsca na linii kolejowej przez podanie jego odległości od wybranego punktu charakterystycznego (np. osi sąsiedniej stacji). Powinien on być zgodny z kierunkiem narastania kilometracji linii.

$$\Delta b_h = \frac{H_i h}{\sqrt{1500^2 - h^2}}. \quad (3)$$

Przedstawione zasady poszerzania skrajni budowli na łukach wyznaczają wymagane wartości poszerzeń międzytorza na dwutorowych liniach kolejowych usytuowanych w łuku kołowym. Należy tutaj stosować wzór:

$$\Delta b_m = 2\Delta b_R + \max \Delta b_h, \quad (4)$$

przy czym wartość $\max \Delta b_h$ powinna wynikać z przechyłki $h_{\max} = 150$ mm i wysokości $H_i = 4850$ mm.

W tej sytuacji szerokość międzytorza d_m linii dwutorowych położonych na łukach tras kolejowych jest wyznaczana ze wzoru:

$$d_m = d_0 + \Delta b_m, \quad (5)$$

gdzie: d_0 oznacza nominalny rozstaw osi torów na odcinkach prostych.

W artykule podjęto także kwestię konstruowania układu geometrycznego linii dwutorowej położonej w łuku, z wykorzystaniem zasad analitycznej metody projektowania [20, 21]. Pozwoliło to uzyskać pełnię spojrzenia na rozpatrywany problem oraz określić sposób wyznaczania kluczowych parametrów. Kontynuację prowadzonej analizy stanowiło zagadnienie kilometracji linii kolejowej.

Założono przeprowadzenie analizy elementarnej (symetrycznego) układu geometrycznego, składającego się z łuku kołowego i dwóch krzywych przejściowych tego samego rodzaju i tej samej długości. Przyjęty w artykule tok postępowania jest następujący:

- analityczny zapis osi międzytorza,
- wyznaczenie parametrów toru zewnętrznego,
- wyznaczenie parametrów toru wewnętrznego,
- wyznaczenie różniczy rzędnych w lokalnym układzie współrzędnych,
- transformacja uzyskanego rozwiązania do układu PL-2000 [22],
- utworzenie pikietażu osi międzytorza i torów szlakowych.

Analogicznie jak w pracach [20, 21] przyjmuje się lokalny układ współrzędnych (LUW), związany w danym przypadku z osią międzytorza. W tym układzie, w analityczny sposób będą również zapisane osie obydwu torów.

3. Analityczny zapis osi międzytorza

Podstawowe parametry rozpatrywanego układu geometrycznego dotyczące międzytorza, to promień R_m łuku kołowego osi międzytorza oraz długość

l_m krzywej przejściowej na osi międzytorza. Przy doborze tych parametrów należy uwzględnić, że odpowiednie wartości w torze zewnętrznym (R_z i l_z) i torze wewnętrznym (R_w i l_w) są inne; one również – podobnie jak wartości R_m i l_m – muszą spełniać odpowiednie warunki kinematyczne. Zakłada się zastosowanie krzywej przejściowej w postaci kłotoidy, której krzywizna jest opisana wzorem:

$$k(l) = \frac{1}{R_m l_m} l, \quad (6)$$

a kąt nachylenia stycznej:

$$\Theta(l) = \frac{1}{2R_m l_m} l^2, \quad (7)$$

gdzie: współrzędna liniowa l określa położenie danego punktu krzywej na jej długości.

Równania parametryczne krzywej KPm (kłotoidy) w związanym z tą krzywą układzie współrzędnych x_m, y_m są następujące [20]:

$$x_m(l) = l - \frac{1}{40R_m^2 l_m^2} l^5 + \frac{1}{3456R_m^4 l_m^4} l^9 - \frac{1}{599040R_m^6 l_m^6} l^{13}, \quad (8)$$

$$y_m(l) = -\frac{1}{6R_m l_m} l^3 + \frac{1}{336R_m^3 l_m^3} l^7 - \frac{1}{42240R_m^5 l_m^5} l^{11}. \quad (9)$$

Na końcu krzywej:

$$x_m(l_m) = l_m - \frac{l_m^3}{40R_m^2} + \frac{l_m^5}{3456R_m^4} - \frac{l_m^7}{599040R_m^6}, \quad (10)$$

$$y_m(l_m) = -\frac{l_m^2}{6R_m} + \frac{l_m^4}{336R_m^3} - \frac{l_m^6}{42240R_m^5}, \quad (11)$$

$$Q_m(l_m) = -\frac{l_m}{2R_m}. \quad (12)$$

Dla kąta zwrotu trasy α transformacja kłotoidy do przyjętego lokalnego układu współrzędnych (pokazanego na rysunku 1) odbywa się przez obrót układu x_m, y_m w prawo o kąt $\alpha/2$. W wyniku tej operacji otrzymuje się równania parametryczne krzywej w LUW:

$$x(l) = x_m(l) \cos \frac{\alpha}{2} - y_m(l) \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (13)$$

$$y(l) = x_m(l) \sin \frac{\alpha}{2} + y_m(l) \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (14)$$

Występujący w tych równaniach parametr $l \in \langle 0, l_m \rangle$, a odcięta krzywej przejściowej $x \in \langle 0, x(l_m) \rangle$, gdzie:

$$x(l_m) = x_m(l_m) \cos \frac{\alpha}{2} - y_m(l_m) \sin \frac{\alpha}{2} = L_{Kpm}. \quad (15)$$

Rzędna końcowa krzywej przejściowej wynosi:

$$y(l_m) = x_m(l_m) \sin \frac{\alpha}{2} + y_m(l_m) \cos \frac{\alpha}{2} = y_{Kpm}, \quad (16)$$

kąt nachylenia stycznej zaś:

$$\Theta(l_m) = -\frac{l_m}{2R_m} + \frac{\alpha}{2}, \quad (17)$$

stąd wartość nachylenia stycznej:

$$s(l_m) = \tan \Theta(l_m) = \tan \left(-\frac{l_m}{2R_m} + \frac{\alpha}{2} \right) = s_{Kpm}. \quad (18)$$

Znając położenie krzywej przejściowej, można wpisać w układ geometryczny łuk kołowy o promieniu R_m . Długość połowy jego rzutu na oś x , tj. wartość L_{LKm} , określa się na podstawie warunków styczności:

- na początku łuku (tj. dla $x = L_{Kpm}$) $s = s_{Kpm}$,
 - na środku łuku (tj. dla $x = L_{Kpm} + L_{LKm}$) $s = 0$,
- z których wynika, że:

$$L_{LKm} = \frac{s_{Kpm}}{\sqrt{1 + s_{Kpm}^2}} R_m \quad (19)$$

Znajomość L_{Kpm} i L_{LKm} umożliwia zapisanie równania łuku kołowego w postaci funkcji jawnej $y = y(x)$.

$$y(x) = y_{Kpm} + \sqrt{R_m^2 - [L_{Kpm} + L_{LKm} - x]^2} - \sqrt{R_m^2 - L_{LKm}^2}, \quad (20)$$

$$x \in \langle L_{Kpm}, L_{Kpm} + L_{LKm} \rangle.$$

Oznaczając odcięta punktu środkowego $L_{Kpm} + L_{LKm} = x_{Sm}$, otrzymuje się następującą postać wzoru na rzędną środka łuku:

$$y(x_{Sm}) = y_{Kpm} + R_m - \sqrt{R_m^2 - L_{LKm}^2} = y_{Sm}. \quad (21)$$

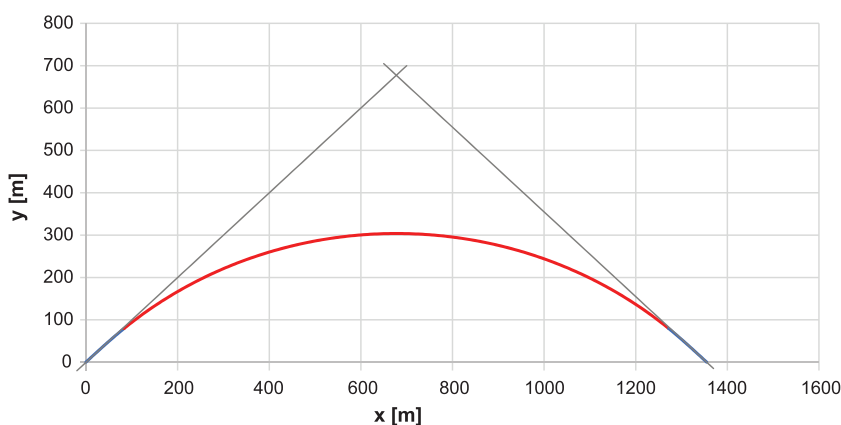
Ze względu na symetrię, lokalny układ współrzędnych obejmował połowę całego układu, tj. rejon od początku krzywej przejściowej do środka łuku kołowego. Należy jeszcze uzupełnić rzędne dla drugiej części projektowanego rejonu, tj. dla: $x \in \langle L_{Kpm} + L_{LKm}, 2L_{Kpm} + 2L_{LKm} \rangle$. Będą one lustrzanym odbiciem przedstawionego rozwiązania uzyskanego dla $x \in \langle 0, L_{Kpm} + L_{LKm} \rangle$.

Dla drugiej połowy łuku kołowego obowiązuje wzór (20), stosowany dla pierwszej połowy łuku. Dla drugiej krzywej przejściowej, tj. dla $x \in \langle L_{Kpm} + 2L_{LKm}, 2L_{Kpm} + 2L_{LKm} \rangle$, obowiązuje równanie parametryczne (14) oraz inne równanie na $x(l)$:

$$x(l) = 2x(l_m) + 2L_{LKm} - \left[x_m(l) \cos \frac{\alpha}{2} - y_m(l) \sin \frac{\alpha}{2} \right], \quad (22)$$

gdzie: $x_m(l)$ wynika ze wzoru (8), a $y_m(l)$ ze wzoru (9), przy czym $l \in \langle 0, l_m \rangle$.

Przedstawione zależności teoretyczne zostały wykorzystane w przykładzie obliczeniowym z założonym obligatoryjnie kącie zwrotu trasy $\alpha = \pi/2$ rad, w którym dla prędkości jazdy pociągów $V = 120$ km/h założono wartość promienia $R_m = 900$ m, przechyłkę na łuku $h_0 = 80$ mm oraz długość krzywej przejściowej (klotoidy) $l_m = 115$ m. W przypadku doboru wartości l_m



Rys. 1. Układ geometryczny osi międzytorza w lokalnym układzie współrzędnych; kolorem czerwonym oznaczono łuk kołowy, kolorem niebieskim krzywe przejściowe (kąt zwrotu $\alpha = \pi/2$ rad, promień łuku $R_m = 900$ m, długość klotoidy $l_m = 115$ m) [opracowanie własne]

liczono się z koniecznością przyjęcia krótszej krzywej w torze zewnętrznym (w związku z wymaganiami dotyczącymi poszerzania międzytorza), która również musi spełniać warunki kinematyczne. Na rysunku 1 pokazano uzyskane rozwiązanie geometryczne.

4. Wyznaczenie osi toru zewnętrznego

Promień łuku kołowego toru zewnętrznego, będącego łukiem współśrodkowym z osią międzytorza, wynosi $R_z = R_m + \frac{d_m}{2}$. Również rzędna punktu środkowego łuku kołowego w torze zewnętrznym ulega zwiększeniu o wartość $d_m/2$ w stosunku do odpowiadającej rzędnej łuku kołowego w osi międzytorza:

$$y_{sz} = y_{sm} + \frac{\Delta b_m}{2}. \quad (23)$$

Początek krzywej przejściowej w torze zewnętrznym znajduje się w punkcie O_z zlokalizowanym na kierunku głównym tego toru opisanym równaniem:

$$y = \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right) x + \frac{d_0}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (24)$$

Współrzędne początku krzywej przejściowej nie są w tej fazie procedury znane. Z równania (24) wynika, że łącząc je związek:

$$y_{Oz} = \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right) x_{Oz} + \frac{d_0}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (25)$$

Kluczową wielkością, wyznaczającą możliwość poszerzenia międzytorza, jest długość l_z krzywej przejściowej w torze zewnętrznym. Dla rozpatrywanego toru obowiązują bowiem wszystkie zależności dotyczące osi międzytorza, tj. równania (6)÷(22), w których długość l_m została zastąpiona przez l_z .

Wartość l_z musi być tak dobrana, żeby rzędna punktu środkowego y_{sz} łuku kołowego spełniała warunek (23). Przy uwzględnieniu analogii do równania (21) otrzymuje się równanie

$$y_{KPz} + R_z - \sqrt{R_z^2 - L_{LKz}^2} = y_{sm} + \frac{d_m}{2},$$

czyli:

$$y_{Oz} + x_z(l_z) \sin \frac{\alpha}{2} + y_z(l_z) \cos \frac{\alpha}{2} + R_z - \sqrt{R_z^2 - L_{LKz}^2} = y_{sm} + \frac{d_m}{2}. \quad (26)$$

Spełnienie warunku (26) powoduje konieczność przyjęcia odpowiedniej wartości l_z oraz znalezienia y_{Oz} , która będzie należeć do prostej bazowej. Aby można było wyznaczyć obie niewiadome, należy jeszcze – przy uwzględnieniu analogii do równania (15) – uwzględnić warunek zgodności odciętych.

$$x_{Oz} + x_z(l_z) \cos \frac{\alpha}{2} - y_z(l_z) \sin \frac{\alpha}{2} + L_{LKz} = x_{sm}. \quad (27)$$

Z układu równań (26) i (27), po uwzględnieniu zależności (25) i po odpowiednich przekształceniach, można otrzymać następujące wyrażenie:

$$\begin{aligned} & \frac{d_0}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} - \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{l_z^2}{6R_z} - \frac{l_z^4}{336R_z^3} + \frac{l_z^6}{42240R_z^5} \right) + \\ & + \left(1 - \frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2} \tan \left(-\frac{l_z}{2R_z} + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sqrt{1 + \left[\tan \left(-\frac{l_z}{2R_z} + \frac{\alpha}{2} \right) \right]^2}} \right) R_z = y_{sm} + \frac{d_m}{2} - \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right) x_{sm} \end{aligned} \quad (28)$$

z którego drogą iteracyjną wyznacza się długość l_z krzywej przejściowej w torze zewnętrznym.

W następnym kroku, z wykorzystaniem równania (27), wyznacza się odciętą x_{Oz} początku krzywej przejściowej w torze zewnętrznym:

$$\begin{aligned} x_{Oz} = x_{sm} - & \left(l_z - \frac{l_z^3}{40R_z^2} + \frac{l_z^5}{3456R_z^4} - \frac{l_z^7}{599040R_z^6} \right) \cos \frac{\alpha}{2} - \\ & + \left(\frac{l_z^2}{6R_z} - \frac{l_z^4}{336R_z^3} + \frac{l_z^6}{42240R_z^5} \right) \sin \frac{\alpha}{2} - \\ & + \frac{\tan \left(-\frac{l_z}{2R_z} + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sqrt{1 + \left[\tan \left(-\frac{l_z}{2R_z} + \frac{\alpha}{2} \right) \right]^2}} R_z. \end{aligned} \quad (29)$$

Mając te dane można uruchomić dalszy tok postępowania, który jest analogiczny jak w przypadku osi międzytorza. W przykładzie obliczeniowym w pierwszym rzędzie należało wyznaczyć wartość wymaganego poszerzenia międzytorza z wykorzystaniem wzoru (4). Z przepisów [18] wynika, że dla promienia $R_m = 900$ m wartość Δb_R wynosi 40 mm, natomiast dla przechyłki na łuku $h_0 = 80$ mm poszerzenie $\max \Delta b_h = 260$ mm. Na tej podstawie poszerzenie międzytorza $\Delta b_m = 340$ mm. Oznacza to, że przy

nominalnym rozstawie torów $d_0 = 4,00$ m odległość pomiędzy osiami torów (zewnętrznego i wewnętrznego) na łuku kołowym wynosi w rozpatrywanym przypadku $d_m = 4,34$ m. Wartość promienia łuku kołowego w torze zewnętrznym wynosi $R_z = 902,17$ m.

Długość l_z krzywej przejściowej w torze zewnętrznym wyznaczono drogą iteracyjną z równania (28). Stosowny tok postępowania pokazuje tablica 1. Wartości $x_z(l_z)$ uzyskano, wykorzystując odpowiednio zmodyfikowany wzór (8). Analogicznie, do określenia $y_z(l_z)$ został wykorzystany wzór (9), dla s_{KPz} wzór (18), a dla L_{LKz} wzór (19). Ponadto w tablicy 1 przyjęto oznaczenia:

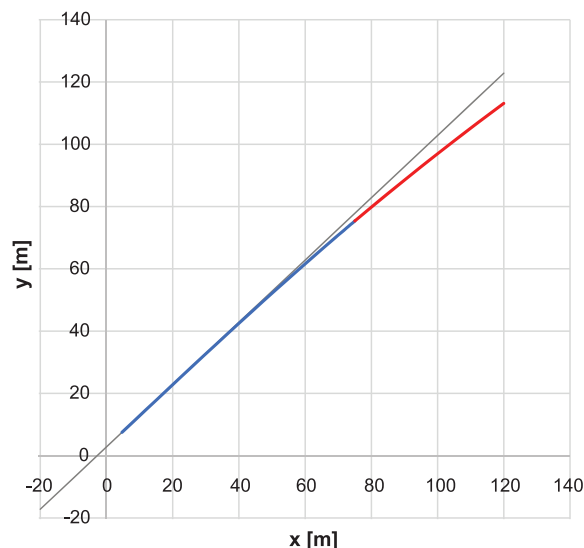
$$\frac{d_0}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} + \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2} \right) y_z(l_z) + R_z - \sqrt{R_z^2 - L_{LKz}^2} - \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right) L_{LKz} = \sum L,$$

$$y_{sm} + \frac{d_m}{2} - \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right) x_{sm} = \sum P,$$

gdzie: wartości x_{sm} i y_{sm} pochodzą z obliczeń przeprowadzonych dla osi międzytorza i wynoszą: $x_{sm} = 677,4821$ m, $y_{sm} = 303,8241$ m.

Jak wynika z tablicy 1, warunki zdania spełnia wartość $l_z = 97,7705$ m. Wyznaczona za pomocą

wzoru (29) odcięta początku pierwszej krzywej przejściowej $x_{Oz} = 4,675$ m, zaś określona wzorem (25) rzędna $y_{Oz} = 7,503$ m. Na rysunku 2 pokazano rejon początkowy uzyskanego rozwiązania geometrycznego dla toru zewnętrznego.



Rys. 2. Rejon początkowy rozwiązania geometrycznego dla toru zewnętrznego w lokalnym układzie współrzędnych; kolorem czerwonym oznaczono fragment łuku kołowego, a kolorem niebieskim krzywą przejściową (kąt zwrotu $\alpha = \pi/2$ rad, promień łuku $R_z = 902,17$ m, długość kłotoidy $l_z = 97,7705$ m) [opracowanie własne]

Tablica 1

Iteracyjny przebieg wyznaczania długości krzywej przejściowej w torze zewnętrznym

l_z [m]	$x_z(l_z)$ [m]	$y_z(l_z)$ [m]	s_{KPz}	L_{LKz} [m]	$\sum L$ [m]	$\sum P$ [m]	$\sum P - \sum L$ [m]
100	99,969	-1,848	0,894875	672,288	-371,517	-371,488	0,028892407
99	98,970	-1,811	0,895873	671,955	-371,504	-371,488	0,015852305
98	97,971	-1,775	0,896873	671,621	-371,491	-377,488	0,002944098
97	96,972	-1,739	0,897873	671,287	-371,478	-377,488	-0,00983224
96	95,973	-1,703	0,898875	670,953	-371,465	-377,488	-0,02247673
95	94,974	-1,668	0,899877	670,619	-371,453	-377,488	-0,03498941
97,9	97,871	-1,771	0,896973	671,588	-371,490	-377,488	0,00166053
97,8	97,771	-1,767	0,897073	671,554	-371,488	-371,488	0,000378281
97,7	97,671	-1,764	0,897173	671,521	-371,487	-371,488	-0,00090265
97,6	97,571	-1,760	0,897273	671,487	-371,486	-371,488	0,00218226
97,79	97,761	-1,767	0,897083	671,551	-371,488	-371,488	0,000250129
97,78	97,751	-1,767	0,897093	671,548	-371,488	-371,488	0,00012199
97,77	97,741	-1,766	0,897103	671,544	-371,488	-371,488	-6,1361E-06
97,76	97,731	-1,766	0,897113	677,541	-377,488	-371,488	-0,00013425
97,772	97,743	-1,766	0,897101	671,545	-377,488	-377,448	1,9488E-05
97,771	97,742	-1,766	0,897102	671,545	-377,488	-377,488	6,67591E-06
97,7705	97,742	-1,766	0,897102	671,544	-377,488	-377,488	2,69889E-07
97,770	97,741	-1,766	0,897103	671,544	-371,488	-371,488	-6,1361E-06
97,769	97,740	-1,766	0,897104	671,544	-371,488	-371,488	-1,8948E-05

[Opracowanie własne].

5. Wyznaczenie osi toru wewnętrznego

Promień łuku kołowego toru wewnętrznego, będącego łukiem współśrodkowym z osią międzytorza, wynosi $R_w = R_m - \frac{d_m}{2}$. Rzędna punktu środkowego łuku kołowego w torze wewnętrznym także ulega zmniejszeniu o wartość $d_m/2$ w stosunku do odpowiadającej rzędnej łuku kołowego w osi międzytorza według wzoru:

$$y_{sw} = y_{sm} - \frac{d_m}{2}. \quad (30)$$

Początek krzywej przejściowej w torze wewnętrznym znajduje się w punkcie O_w zlokalizowanym na kierunku głównym tego toru opisanym równaniem:

$$y = \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right) x - \frac{d_0}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (31)$$

Współrzędne początku krzywej przejściowej nie są znane. Z równania (31) wynika, że łączy je związek:

$$y_{ow} = \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right) x_{ow} - \frac{d_0}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (32)$$

Podobnie jak w przypadku toru zewnętrznego, wielkością wyznaczającą możliwość poszerzenia międzytorza jest długość l_w krzywej przejściowej w torze wewnętrznym. Dla tego toru również obowiązują zależności dotyczące osi międzytorza, tj. równania (6)÷(22), w których długość l_m została zastąpiona przez l_w .

Wartość l_w musi zostać tak dobrana, aby rzędna punktu środkowego y_{sw} łuku kołowego spełniała warunek (30). Przy uwzględnieniu analogii do równania (21) otrzymuje się równanie:

$$y_{KPw} + R_w - \sqrt{R_w^2 - L_{LKw}^2} = y_{sm} - \frac{d_m}{2},$$

czyli:

$$y_{ow} + x_w(l_w) \sin \frac{\alpha}{2} + y_w(l_w) \cos \frac{\alpha}{2} + R_w - \sqrt{R_w^2 - L_{LKw}^2} = y_{sm} - \frac{d_m}{2}. \quad (33)$$

Spełnienie warunku (33) powoduje konieczność przyjęcia odpowiedniej wartości l_w oraz znalezienia y_{ow} , która będzie należeć do prostej bazowej; aby można było wyznaczyć obie niewiadome, należy

jeszcze – przy uwzględnieniu analogii do równania (15) – uwzględnić warunek zgodności odciętych.

$$x_{ow} + x_w(l_w) \cos \frac{\alpha}{2} - y_w(l_w) \sin \frac{\alpha}{2} + L_{LKw} = x_{sm}. \quad (34)$$

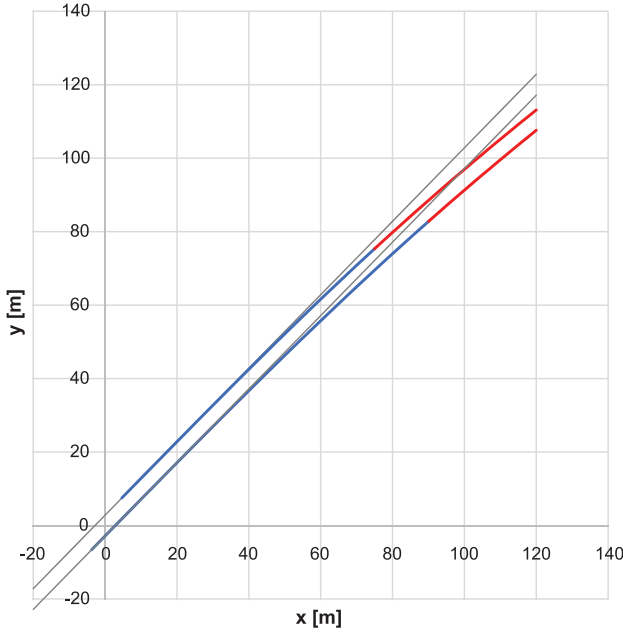
Z układu równań (33) i (34), po uwzględnieniu zależności (32) i odpowiednich przekształceniach, otrzymuje się następujące wyrażenie:

$$-\frac{d_0}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} - \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{l_w^2}{6R_w} - \frac{l_w^4}{336R_w^3} + \frac{l_w^6}{42240R_w^5} \right) + \left(1 - \frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2} \tan \left(-\frac{l_w}{2R_w} + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sqrt{1 + \left[\tan \left(-\frac{l_w}{2R_w} + \frac{\alpha}{2} \right) \right]^2}} \right) R_w = y_{sm} - \frac{d_m}{2} - \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right) x_{sm} \quad (35)$$

z którego drogą iteracyjną wyznacza się długość l_w krzywej przejściowej w torze wewnętrznym. Następnie, wykorzystując równanie (34), wyznacza się odciętą x_{ow} początku krzywej przejściowej w torze wewnętrznym:

$$x_{ow} = x_{sm} - \left(l_w - \frac{l_w^3}{40R_w^2} + \frac{l_w^5}{3456R_w^4} - \frac{l_w^7}{599040R_w^6} \right) \cos \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{l_w^2}{6R_w} - \frac{l_w^4}{336R_w^3} + \frac{l_w^6}{42240R_w^5} \right) \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{\tan \left(-\frac{l_w}{2R_w} + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sqrt{1 + \left[\tan \left(-\frac{l_w}{2R_w} + \frac{\alpha}{2} \right) \right]^2}} R_w. \quad (36)$$

Dalszy tok postępowania jest analogiczny jak w przypadku osi międzytorza i toru zewnętrznego. W przykładzie obliczeniowym wartość promienia łuku kołowego w torze wewnętrznym wynosi $R_w = 897,83$ m. Długość l_w krzywej przejściowej w torze wewnętrznym wyznaczono drogą iteracyjną z równania (35), stosując analogiczną procedurę jak w tablicy 1. Stwierdzono, że warunki zdania spełnia wartość $l_w = 129,636$ m. Wyznaczona za pomocą wzoru (36) odcięta początku pierwszej krzywej przejściowej $x_{ow} = -3,756$ m, zaś określona wzorem (32) rzędna $y_{ow} = -6,585$ m. Na rysunku 3 pokazano rejon początkowy układu geometrycznego rozpatrywanej linii dwutorowej. Ilustruje on konstruowanie poszerzenia międzytorza, które odbywa się na długości krzywych przejściowych.



Rys. 3. Układ geometryczny rozpatrywanej linii dwutorowej w rejonie początkowym; kolorem czerwonym oznaczono fragmenty łuków kołowych, a kolorem niebieskim krzywe przejściowe (kąt zwrotu $\alpha = \pi/2$ rad, promień łuku $R_z = 902,17$ m i $R_w = 897,83$ m, długości kłotoidy $l_z = 97,7705$ m i $l_w = 129,636$ m) [opracowanie własne]

6. Różnice rzędnych w lokalnym układzie współrzędnych

Aby można było porównywać ze sobą wartości rzędnych osi toru zewnętrznego i toru wewnętrznego na tle osi międzytorza, należy ustalić punkt początkowy P analizowanego odcinka linii na odcinku prostym przed łukiem; punkt końcowy K zajmie położenie symetryczne. Jako wartości referencyjne przyjęto odpowiednie współrzędne osi międzytorza $x_{Pm} = -20$ m oraz $y_{Pm} = -20$ m. Odpowiada to współrzędnym punktu położonego na prostej za łukiem $x_{Km} = 1374,964$ m i $y_{Km} = -20$ m.

Z wartości współrzędnych punktu P na osi międzytorza wynikają współrzędne punktu początkowego w torze zewnętrznym i wewnętrznym. Można je obliczyć za pomocą wzorów:

$$x_{Pz} = \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)^2} \left(\frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} y_{Pm} - \frac{d_0}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \right), \quad (37)$$

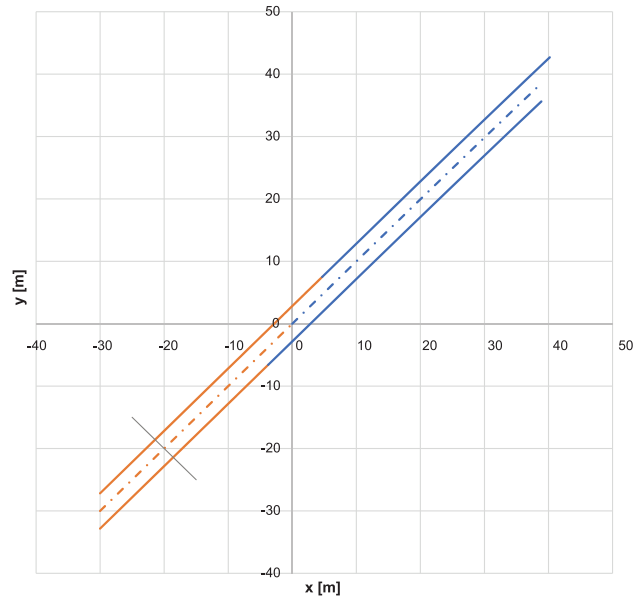
$$y_{Pz} = y_{Pm} - \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} (x_{Pz} - x_{Pm}), \quad (38)$$

dla toru zewnętrznego, a dla toru wewnętrznego ze wzorów:

$$x_{Pw} = \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)^2} \left(\frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} y_{Pm} + \frac{d_0}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \right), \quad (39)$$

$$y_{Pw} = y_{Pm} - \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} (x_{Pw} - x_{Pm}). \quad (40)$$

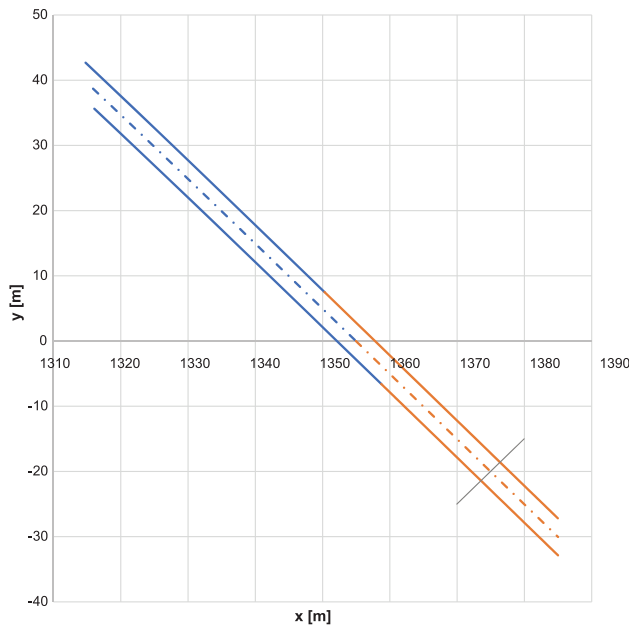
W rozpatrywanym przykładzie obliczeniowym dla toru zewnętrznego otrzymujemy: $x_{Pz} = -21,414$ m, $y_{Pz} = -18,586$ m oraz odpowiadające (na zasadzie symetrii) $x_{Kz} = 1376,378$ m, $y_{Kz} = -18,586$ m. Dla toru wewnętrznego analogiczne wartości są następujące: $x_{Pw} = -18,586$ m, $y_{Pw} = -21,414$ m, $x_{Kw} = 1373,550$ m, $y_{Kw} = -21,414$ m. Na rysunkach 4 i 5 pokazano układy osi torów i osi międzytorza dla strefy początkowej i strefy końcowej.



Rys. 4. Układy geometryczne osi toru zewnętrznego (u góry) i wewnętrznego (u dołu) oraz osi międzytorza (pośrodku) dla strefy początkowej; kolorem niebieskim oznaczono odcinki krzywych przejściowych (kąt zwrotu $\alpha = \pi/2$ rad, promień łuku $R_z = 902,17$ m, $R_m = 900$ m i $R_w = 897,83$ m, długości kłotoidy $l_z = 97,7705$ m, $l_m = 115$ m, $l_w = 129,636$ m) [opracowanie własne]

Na rysunku 6 pokazano wykres różnic rzędnych osi toru zewnętrznego i osi toru wewnętrznego względem rzędnych osi międzytorza na długości rozpatrywanego układu geometrycznego. Jak widać, na skutek nachylenia obydwu głównych kierunków trasy pod kątem $\alpha/2$ wyznaczona wartość rozstawu torów w łuku kołowym $d_m = 4,34$ m występuje tylko w środku całego układu, dla $x_s = 677,482$ m. Różnica rzędnych wzrasta, idąc

w kierunku zarówno początku, jak i końca układu, aby na odcinkach prostych przyjąć wartość stałą równą $d_0/(\cos\alpha/2)$, tj. w danym przypadku 5,657 m.



Rys. 5. Układy geometryczne osi toru zewnętrznego (u góry) i wewnętrznego (u dołu) oraz osi międzytorza (pośrodku) dla strefy końcowej; kolorem niebieskim oznaczono odcinki krzywych przejściowych (kąt zwrotu $\alpha = \pi/2$ rad, promień łuku $R_z = 902,17$ m, $R_m = 900$ m i $R_w = 897,83$ m, długości kłotoidy $l_z = 97,7705$ m, $l_m = 115$ m, $l_w = 129,636$ m) [opracowanie własne]

7. Transformacja uzyskanego rozwiązania do układu PL-2000

Przeniesienie zaprojektowanych w *LUW* współrzędnych osi toru x, y do układu współrzędnych płaskich prostokątnych PL-2000 (stanowiącego element państwowego systemu odniesień przestrzennych [22]) odbywa się z wykorzystaniem wzorów [23]:

$$Y = Y_0 + x \cos\beta - y \sin\beta, \quad (41)$$

$$X = X_0 + x \sin\beta + y \cos\beta, \quad (42)$$

gdzie: Y_0 i X_0 oznaczają współrzędne początku lokalnego układu współrzędnych w układzie PL-2000,

β zaś jest kątem obrotu układu globalnego, jaki jest wymagany do uzyskania symetrycznego ustawienia kierunków głównych.

Zakładając transformację osi międzytorza do układu PL-2000, przyjmuje się następujące wartości stanowiące powiązanie *LUW* z układem PL-2000:

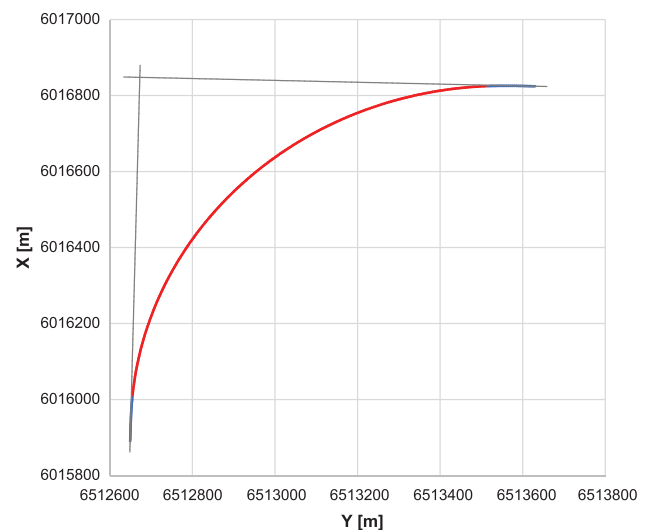
- współrzędne punktu przecięcia kierunków głównych:

$$Y_W = 6512672,516 \text{ m}, X_W = 6016847,921 \text{ m},$$

- kąt obrotu $\beta = 0,76094442$ rad.

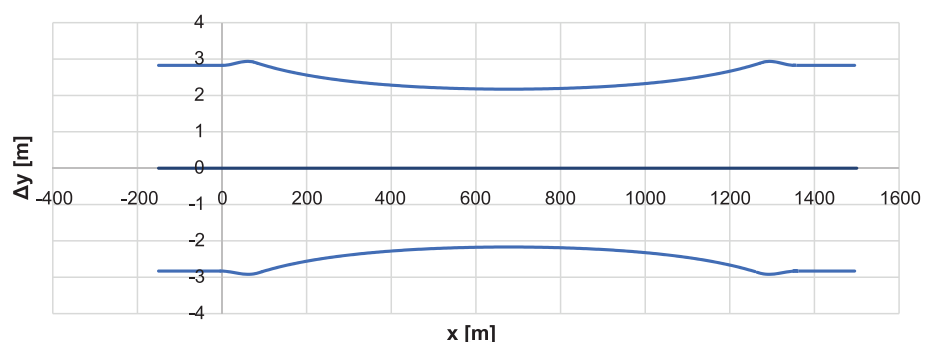
Ponieważ w rozpatrywanym przypadku obliczeniowym współrzędne punktu przecięcia kierunków głównych w *LUW* wynoszą: $x_W = 677,482$ m, $y_W = 677,482$ m, można łatwo wyznaczyć współrzędne początku lokalnego układu współrzędnych w układzie PL-2000. Ich wartości są następujące: $Y_0 = 6512649,089$ m, $X_0 = 6015890,103$ m.

Na rysunku 7 pokazano układ geometryczny osi międzytorza w globalnym układzie współrzędnych PL-2000, uzyskany przez transformację współrzędnych x, y za pomocą wzorów (41) i (42).



Rys. 7. Układ geometryczny osi międzytorza z rysunku 1 w układzie współrzędnych PL-2000; kolorem czerwonym oznaczono łuk kołowy, a kolorem niebieskim krzywe przejściowe (kąt zwrotu $\alpha = \pi/2$ rad, promień łuku $R_m = 900$ m, długość kłotoidy $l_m = 115$ m) [opracowanie własne]

Rys. 6. Wykres różnic rzędnych osi toru zewnętrznego i osi toru wewnętrznego względem rzędnych osi międzytorza na długości rozpatrywanego układu geometrycznego (kąt zwrotu $\alpha = \pi/2$ rad, promień łuku $R_z = 902,17$ m, $R_m = 900$ m i $R_w = 897,83$ m, długości kłotoidy $l_z = 97,7705$ m, $l_m = 115$ m, $l_w = 129,636$ m) [opracowanie własne]



8. Kilometracja osi międzytorza i torów szlakowych

Bezpośrednie zastosowanie przepisów [18] w zakresie zasad ustalania kilometracji osi toru, prowadziłoby na linii dwutorowej do zróżnicowania długości obydwu torów na skutek występowania odcinków położonych w łuku kołowym. Jak się wydaje, kilometracja eksploatacyjna linii kolejowej powinna w takim przypadku być prowadzona po osi międzytorza, na łukach dla obydwu torów zaś należałoby operować pikietażem projektowym. Takie właśnie założenie zostało przyjęte w niniejszym punkcie. W dokumentacji projektowej wyznaczanie kilometracji (pikietażu) polega na określeniu współrzędnych występujących punktów charakterystycznych w kartezjańskim układzie współrzędnych.

Jeśli dysponuje się zapisem matematycznym osi międzytorza i osi torów, wówczas dla odcinków prostych i krzywych przejściowych nie stanowi to żadnego problemu, gdyż można bezpośrednio wykorzystać podane wartości rzędnych i odciętych, natomiast dla odcinków zlokalizowanych na łuku kołowym, znając ich długości Δl , można określić współrzędne ich punktów skrajnych. Trzeba najpierw obliczyć odpowiadające wartości kąta środkowego ze wzoru:

$$\Delta\Theta = \frac{\Delta l}{R}. \quad (43)$$

Kluczową wartością jest różnica $\Theta - \Delta\Theta$, gdzie Θ jest kątem środkowym zawartym pomiędzy początkiem łuku kołowego i jego punktem środkowym, przy symetrycznym ustawieniu łuku. Dla punktów położonych z lewej strony łuku kołowego (tj. dla $x_i < x_s$) obowiązują wzory:

$$x_i = x_s - R \sin(\Theta - \Delta\Theta), \quad (44)$$

$$y_i = y_s + R \cos(\Theta - \Delta\Theta). \quad (45)$$

Dla punktów położonych z prawej strony łuku kołowego (tj. dla $x_i > x_s$) wzór ulega zmianie na x_i :

$$x_i = x_s + R \sin(\Theta - \Delta\Theta). \quad (46)$$

W przykładzie obliczeniowym założono początek kilometracji (pikietażu) osi międzytorza i osi torów, tj. wartość $L = 0$, w punktach odpowiadającym położeniu punktu $P_m = (-20, -20)$ m na rysunku 4. Dla poszczególnych punktów charakterystycznych (w tym znaków hektometrowych) wyznaczono wartości współrzędnej liniowej L , współrzędne x, y układu LUW oraz współrzędne Y, X układu $PL-2000$. Dane te umożliwiają łatwe wyznaczenie tych punktów

w terenie. W tablicy 2 przedstawiono wyniki obliczeń dla osi międzytorza (przydatne do utworzenia kilometracji linii).

Zawarte w tablicy 2 wartości liczbowe dla początku i końca układu, które odnoszą się do osi międzytorza, można wkomponować do kilometracji linii kolejowej. Dotyczy to również początków i końców obu krzywych przejściowych oraz środka łuku kołowego.

Tablica 3 zawiera zestawienie lokalizacji podstawowych parametrów geometrycznych rozpatrywanego układu geometrycznego. Z tablic 2 i 3 wynika, że całkowita długość układu dla osi toru zewnętrznego, wynosząca 1 588,690 m, jest o 3,405 m większa od długości osi międzytorza; z kolei ta ostatnia jest większa o 3,397 m od długości układu dla osi toru wewnętrznego, która wynosi 1581,888 m.

9. Ocena przydatności proponowanej metody

Proponowana metoda wyznaczania parametrów poszerzania międzytorza została przedstawiona na przykładzie wybranego układu geometrycznego, obejmującego rejon zmiany kierunku trasy łukiem kołowym o promieniu $R_m = 900$ m (było to związane z przyjętą prędkością jazdy pociągów $V = 120$ km/h). Aby ocenić praktyczną przydatność tej metody w odniesieniu do innych sytuacji geometrycznych, przeprowadzono szczegółową analizę dla dwóch dalszych przypadków, charakteryzujących się odbiegającymi znacznie wartościami promienia łuku: $R_m = 300$ m (co umożliwia przejazd z prędkością $V = 80$ km/h) i $R_m = 2000$ m (dla jazdy z prędkością $V = 180$ km/h). Układy geometryczne odpowiednich rejonów zmiany kierunku trasy zostały przedstawione na rysunku 8, natomiast zestawienie obliczonych parametrów dla osi międzytorza oraz osi toru zewnętrznego i toru wewnętrznego zawiera tablica 4.

Z danych liczbowych zawartych w tablicy 4 jednoznacznie wynika poprawność proponowanej metody. Dla każdego promienia łuku R_m na międzytorzu odcięte środka łuku w torze zewnętrznym x_{sz} i torze wewnętrznym x_{sw} są dokładnie takie same jak odpowiednia wartość odciętej dla międzytorza x_{sm} (czyli $x_{sz} = x_{sw} = x_{sm}$). Kluczowe znaczenie dla weryfikacji obliczeń odgrywa jednak szerokość międzytorza d_m wyznaczona za pomocą wzoru:

$$d_m = y_{sz} - y_{sw}, \quad (47)$$

jako różnica rzędnych środka łuku – w torze zewnętrznym y_{sz} i torze wewnętrznym y_{sw} . Jak widać, wartości d_m podane w tablicy 4 ściśle odpowiadają przyjętym wartościom poszerzenia międzytorza Δb_m . Całość

Tablica 2

Wyznaczone współrzędne punktów charakterystycznych osi międzytorza ($R_m = 900$ m, $l_m = 115$ m)

	L [m]	x [m]	y [m]	Y [m]	X [m]
Początek układu	0	20,000	-20,000	6 512 648,397	6 015 861,827
Początek $KP1$	28,284	0,000	0,000	6 512 649,089	6 015 890,103
	100	51,128	50,288	6 512 651 436	6 015 961,779
Koniec $KP1$	143,284	83,015	79,553	6 512 654,347	6 016 004,962
	200	126,750	115,649	6 512 661,127	6 016 061,262
	300	209,075	172,326	6 512 681,661	6 016 159,078
	400	297,177	219,525	6 512 712,914	6 016 254,015
	500	389,969	256,664	6 512 754,502	6 016 344,901
	600	486,307	283,285	6 512 805,910	6 016 430,614
	700	585,003	299,060	6 512 866,506	6 016 510,100
Środek LK	792,642	677,482	303,824	6 512 930,193	6 016 577,323
	800	684,840	303,794	6 512 935,542	6 016 582,375
	900	784,585	297,429	6 513 012,166	6 016 646,551
	1000	883,010	280,042	6 513 095,433	6 016 701,834
	1100	978,900	251,850	6 513 184,317	6 016 747,544
	1200	1071,073	213,198	6 513 277,721	6 016 783,116
	1300	1158,391	164,565	6 513 374,494	6 016 808,112
	1400	1239,779	106,549	6 513 473,441	6 016 822,223
Koniec $KP2$	1442,001	1271,949	79,553	6 513 515,355	6 016 824,857
	1500	1314,449	40,094	6 513 573,344	6 016 825,590
Początek $KP2$	1557,001	1354,964	0,000	6 513 630,334	6 016 824,494
Koniec układu	1585,285	1374,964	-20,000	6 513 658,609	6 016 823,802

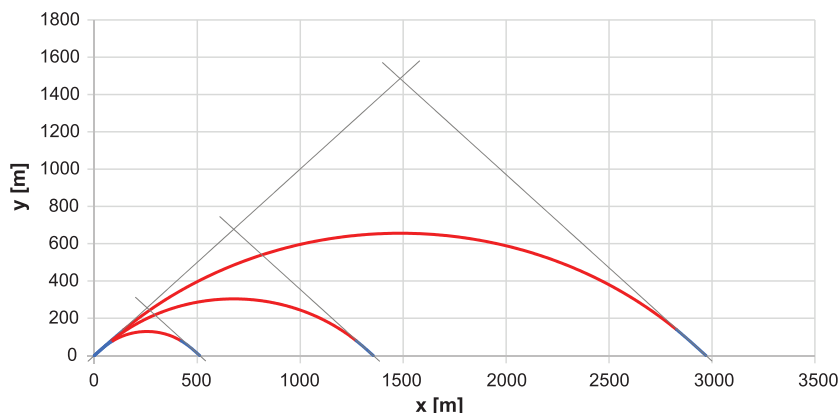
[Opracowanie własne].

Tablica 3

Zestawienie lokalizacji podstawowych parametrów geometrycznych rozpatrywanego układu geometrycznego

Parametr geometryczny [m]	Tor zewnętrzny	Międzytorze	Tor wewnętrzny
Promień LK	902,17	900	897,83
Długość KP (klotoidy)	97,772	115	129,636
Pikietaż początku układu	0	0	0
Odcięta początkowa x_p	-21,414	-20,000	-18,586
Rzędna początkowa y_p	-18,586	-20,000	-21,414
Odcięta początkowa Y_p	6512646,398	6512648,397	6512650,397
Rzędna początkowa X_p	6015861,876	6015861,827	6015861,778
Pikietaż początku $KP1$	36,896	28,284	20,972
Pikietaż końca $KP1$	134,668	143,284	150,608
Pikietaż środka LK	794,345	792,642	790,944
Pikietaż końca $KP2$	1454,021	1442,001	1431,280
Pikietaż początku $KP2$	1551,794	1557,001	1560,916
Pikietaż końca układu	1588,690	1585,285	1581,888
Odcięta końcowa x_K	1376,378	1374,964	1373,550
Rzędna końcowa y_K	-18,586	-20,000	-21,414
Odcięta końcowa Y_K	6513658,658	6513658,609	6513658,561
Rzędna końcowa X_K	6016825,802	6016823,802	6016821,803

[Opracowanie własne].



Rys. 8. Rejon zmiany kierunku trasy z tablicy 4 dla $R_m = 300$ m, 900 m i 2000 m (w kolejności od lewej strony); kolorem czerwonym oznaczono łuki kołowe, a kolorem niebieskim krzywe przejściowe [opracowanie własne]

Tablica 4

Zestawienie obliczonych parametrów geometrycznych dla wybranych rejonów zmiany kierunku trasy (kąt zwrotu $\alpha = \pi/2$ rad)

Parametry geometryczne	Przypadek 1 $V = 80$ km/h, $h = 130$ mm	Przypadek 2 $V = 120$ km/h, $h = 80$ mm	Przypadek 3 $V = 180$ km/h, $h = 100$ mm
Międzytorze			
Promień łuku R_m [m]	300	900	2000
Poszerzenie międzytorza Δb_m [mm]	670	340	370
Długości krzywych przejściowych l_m [m]	120	115	200
Odcięta środka łuku x_{sm} [m]	255,9141	677,4821	1485,5076
Rzędna środka łuku y_{sm} [m]	128,8257	303,8241	655,9020
Tor zewnętrzny			
Promień łuku R_z [m]	302,335	902,170	2002,185
Długości krzywych przejściowych l_z [m]	109,8855	97,8525	176,501
Odcięta środka łuku x_{sz} [m]	255,9141	677,4821	1485,5076
Rzędna środka łuku y_{sz} [m]	131,1607	305,9942	658,0870
Tor wewnętrzny			
Promień łuku R_w [m]	297,665	897,830	19997,815
Długości krzywych przejściowych l_w [m]	129,1851	129,8361	220,9714
Odcięta środka łuku x_{sw} [m]	255,9141	677,4821	1485,5076
Rzędna środka łuku y_{sw} [m]	126,4907	301,6541	653,7170
Weryfikacja obliczeń			
Szerokość międzytorza d_m [m]	4,6700	4,3401	4,3700

[Opracowanie własne].

przedstawionego zestawienia wskazuje na absolutną precyzję przeprowadzonych obliczeń. Można zatem przyjąć, że proponowana metoda wyznaczania parametrów poszerzania międzytorza może mieć zastosowanie dla pełnego zakresu promieni łuków kołowych i spełnia wszelkie wymagania pod względem wymaganej dokładności.

10. Zakończenie

W pracy podjęto kwestię konstruowania układu geometrycznego dwutorowej linii kolejowej położonej w łuku, z wykorzystaniem zasad analitycznej metody projektowania. Umożliwiło to – podobnie jak

w innych zastosowaniach tej metody – uzyskać pełnię spojrzenia na rozpatrywany problem oraz określić sposób wyznaczania kluczowych parametrów. Założono przeprowadzenie analizy dla elementarnego (symetrycznego) układu geometrycznego, składającego się z łuku kołowego i dwóch krzywych przejściowych tego samego rodzaju i tej samej długości.

Przedstawiono analityczną metodę wyznaczenia osi międzytorza oraz osi toru zewnętrznego i toru wewnętrznego, prowadzącą do uzyskania wymaganej wartości poszerzenia międzytorza. Samo poszerzenie jest uzyskiwane przez różnicowanie długości krzywych przejściowych w torze zewnętrznym i torze wewnętrznym. Zostały sformułowane odpowiednie wyrażenia matematyczne,

z których drogą iteracyjną można wyznaczyć długości odpowiednich krzywych przejściowych. Dysponując współrzędnymi osi torów w lokalnym układzie współrzędnych, można je łatwo przenieść do układu współrzędnych płaskich prostokątnych PL-2000, stanowiącego element państwowego systemu odniesień przestrzennych.

Kontynuację prowadzonej analizy stanowiło zagadnienie kilometracji (pikietażu) osi międzytorza i torów szlakowych. W przykładzie obliczeniowym dla poszczególnych punktów charakterystycznych osi międzytorza (w tym znaków hektometrowych) wyznaczono wartości współrzędnej liniowej i współrzędnych kartezjańskich, co umożliwia łatwe wyznaczenie tych punktów w terenie i jest przydatne do utworzenia kilometracji linii.

Praktyczna przydatność proponowanej metody wyznaczania parametrów poszerzania międzytorza została określona na podstawie szczegółowej analizy przeprowadzonej dla kilku przypadków, charakteryzujących się odbiegającymi znacznie od siebie wartościami promienia łuku kołowego. Analiza ta potwierdziła wysoką precyzję wykonanych obliczeń i wykazała, że omawiana metoda może mieć zastosowanie dla pełnego zakresu promieni łuków kołowych oraz spełnia wszelkie wymagania pod względem wymaganej dokładności.

Literatura

1. Deutsche Bahn: 883.2000 DB_REF-Festpunktfeld, Deutsche Bahn Netz AG, Berlin, Germany, 2016.
2. Esvelde C.: *Modern railway track (Second edition)*, Delft University of Technology, MRT-Productions, Zaltbommel, The Netherlands, 2001.
3. European Committee for Standardization (CEN): *Railway applications – Track – Track alignment design parameters – Track gauges 1435 mm and wider. Part 1: Plain line. EN 13803-1*, Brussels, Belgium, 2010.
4. European Railway Agency: *Guide for the application of the INF TSI. Version 3.0*, Dec. 14, Valenciennes Cedex, France, 2015.
5. Federal Railroad Administration: *Code of federal regulations title 49 transportation*, US Government Printing Office, Washington, DC, 2008.
6. Lindahl M.: *Track geometry for high-speed railways*, Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, Sweden, 2001.
7. Bałuch H.: *Analiza i wytyczne projektowania zmian układu geometrycznego torów na liniach przystosowanych do dużych prędkości pociągów*, Prace COBiRTK, z. 45/1972.
8. Bałuch H.: *Optymalizacja układów geometrycznych torów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1983.
9. Nowakowski M.J.: *Projektowanie poszerzeń międzytorzy w aspekcie zmian dopuszczalnych wartości parametrów geometrycznych i kinematycznych*, Przegląd Komunikacyjny, nr 9/2015, SITK RP Warszawa, s. 15–18.
10. High speed and the city, Report UIC, Paris 2010.
11. Koc W.: *Kształtowanie toru zwrotnego rozjazdu z odcinkami krzywizny liniowej*, Problemy Kolejnictwa, tom 61, z. 174/2017, Instytut Kolejnictwa, Warszawa 2017, s. 15–24.
12. Ping W.: *Design of high-speed railway turnouts. Theory and Applications*, Academic Press, Published by Elsevier Inc., 2015.
13. Technical Memorandum: *Alignment design standards for high-speed train operation*, Prepared by Parsons Brinckerhoff for the California High-Speed Rail Authority, USA, 2009.
14. Weizhu F.: *Technical characteristics of high-speed turnout in France*, Journal of Railway Engineering Society, iss. 9/2009, China Railway Engineering Corporation, pp. 18–21, 35.
15. Koc W.: *Optimum shape of turnout diverging track with segments of variable curvature*, Journal of Transportation Engineering, Part A: Systems, vol. 145, iss. 1/2019, ASCE, Article ID 04018077.
16. Koc W.: *Analytical design method for widening the intertrack space*, Current Journal of Applied Science and Technology, vol. 32, iss. 3/2019, SCIENCE DO-MAIN International, Article ID CJAST.46393.
17. Standardy Techniczne – Szczegółowe warunki techniczne dla modernizacji lub budowy linii kolejowych do prędkości $V_{\max} \leq 200$ km/h (dla taboru konwencjonalnego) / 250 km/h (dla taboru z wychylnym pudłem) – TOM I – DROGA SZYNOWA – Załącznik ST-T1_A6: Układy geometryczne torów, PKP Polskie Linie Kolejowe S.A., Warszawa, 2018.
18. Warunki Techniczne utrzymania nawierzchni na liniach kolejowych Id-1 (D-1). Moduł A2 – Skrajnia budowli, PKP Polskie Linie Kolejowe S.A., Warszawa 2015.
19. Warunki Techniczne utrzymania nawierzchni na liniach kolejowych Id-1 (D-1). Moduł A2 – Skrajnia budowli. Załącznik nr II – Karty typu skrajni budowli, PKP Polskie Linie Kolejowe S.A., Warszawa, 2015.
20. Koc W.: *Metoda projektowania rejonu zmiany kierunku trasy kolejowej*, Problemy Kolejnictwa, tom 55, z. 152/2011, Instytut Kolejnictwa, Warszawa, 2011, s. 197–217.
21. Koc W.: *Design of rail-track geometric systems by satellite measurement*, Journal of Transportation Engineering, vol. 138, iss. 1/2012, ASCE, pp. 114–122.
22. Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 15 października 2012 roku w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych, Dz.U., 2012, nr 0, poz. 1247.
23. Korn G.A., Korn T.M.: *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1983.